黎曼曲面习题

梅加强 http://ims.nju.edu.cn/~meijq

2015.12.26

1. 证明: 分式线性变换 $z \to \dfrac{z-i}{z+i}$ 是 $(\mathbb{H}, H_{-1})$ 和 $(\mathbb{D}, H)$ 之间的等距同构, 其中 $H_{-1} = \dfrac{1}{(\Im z)^2} dz \otimes d\bar{z}$, $H = \dfrac{4}{(1-|z|^2)^2} dz \otimes d\bar{z}$.

2. 证明 Möbius 变换保持 $\mathbb{D}$ 上的 Poincaré 度量 H.

3. 设 $t > 0$, 计算 $d_{H_{-1}}(it, 1+it)$, 并说明当 $t \to +\infty$ 时该距离趋于零.

4. 计算 $(\mathbb{H}, H_{-1})$ 的曲率.

5. 设 L 是紧黎曼曲面 Σ 上的全纯线丛, 如果 $c_1(L) = 0$, 证明: 存在 L 上的 Hermite 度量, 使得其曲率形式恒为零.
(提示: 可以用第八周习题结论.)

6*. 设 L_1, L_2 为黎曼球面上的全纯线丛. 证明: L_1 同构于 L_2 当且仅当 $c_1(L_1) = c_1(L_2)$.