黎曼曲面习题

梅加强 http://ims.nju.edu.cn/˜meijq

2015.12.11

1. 计算标准环面 $\mathbb{C}/\langle 1, i\rangle$ 的 j 不变量, 并证明椭圆曲线 $y^2 = x^3 - x$ 所决定的黎曼曲面同构于标准环面.

2. 记 $\rho = e^{\frac{2\pi i}{3}}$, 计算环面 $\mathbb{C}/\langle 1, \rho\rangle$ 的 j 不变量, 并说明它和椭圆曲线 $y^2 = x^3 - 1$ 的关系.

3. 记 $PSL(2, \mathbb{Z}) = SL(2, \mathbb{Z})/\pm 1$. 证明 $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 和 $T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 是 $PSL(2, \mathbb{Z})$ 的生成元.

4. 群 $PSL(2, \mathbb{Z})$ 以分式线性变换的形式作用于上半平面 $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im z > 0\}$, 证明 F 是其基本域, 其中

$$F = \{\tau \in \mathbb{H} \mid |\tau| > 1,\ -1/2 \le \Re\tau < 1/2\} \cup \{\tau \in \mathbb{H} \mid |\tau| = 1,\ -1/2 \le \Re\tau \le 0\}.$$

(参考文献：Zagier, Elliptic Modular Forms and Their Applications)

5. 当 $\varepsilon > 0$ 时, 定义 $G_{2,\varepsilon}$ 如下：

$$G_{2,\varepsilon}(\tau) = \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2\setminus\{(0,0)\}} \frac{1}{(m+n\tau)^2|m+n\tau|^\varepsilon}, \quad \tau \in \mathbb{H}.$$

证明 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} G_{2,\varepsilon}(\tau) = G_2(\tau) - \dfrac{\pi}{\Im\tau}$. (参考文献同上)