

黎曼曲面习题

梅加强 <http://ims.nju.edu.cn/~meijq>

2015.12.4

1. 设复系数多项式 $4t^3 - g_2t - g_3$ 的三个根为 e_1, e_2, e_3 . 记 $\Delta = 4^2(e_1 - e_2)^2(e_1 - e_3)^2(e_2 - e_3)^2$. 证明: $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2$.
(提示: 用范德蒙行列式.)
2. 证明: 当 $g_2, g_3 \in \mathbb{R}, \Delta > 0$ 时, 多项式 $4t^3 - g_2t - g_3$ 有三个不同的实根.
3. 记 $\Sigma = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid w^2 = z\}$, 其加一点紧致化为紧黎曼曲面, 计算其亏格.
4. 设 Σ 为紧黎曼曲面, $p_1, \dots, p_n \in \Sigma$. 证明: 存在亚纯微分 ω , 使得其极点和零点均不在 $\{p_i\}_{i=1}^n$ 中.