黎曼曲面习题

梅加强 http://ims.nju.edu.cn/~meijq

2015.11.20

1. 设 Σ 为紧黎曼曲面, p, q 为两个不同点. 证明: 存在亚纯微分 ω, 使得它只以 p, q 为极点, 且在 p 附近的奇性部分为 dz/z, 在 q 附近的奇性部分为 $-dw/w$, 其中 z, w 分别是以 p, q 为中心的局部坐标.
(提示：考虑因子 $D = -p - q$)

2. 设 Σ 为紧黎曼曲面, $p_1, \cdots, p_n$ 为 n 个不同点, $c_1, \cdots, c_n$ 为 n 个复数. 如果 $c_1 + \cdots + c_n = 0$, 证明: 存在亚纯微分 ω, 使得它在 p_i 处的留数恰为 c_i.

3. 设 ω 为黎曼球面上的亚纯微分. 证明: ω 的留数处处为零当且仅当 $\omega = df$, 其中 f 为亚纯函数.

4. 设 D 为紧黎曼曲面上的因子. 如果 $d(D) \geq g$, 其中 g 为亏格, 则 D 线性等价于有效因子.

5. 设 $0 \to V_0 \to V_1 \to \cdots \to V_n \to 0$ 为有限维向量空间之间的正合序列, 证明 $\sum\limits_{i=0}^{n} (-1)^i \dim V_i = 0$.