黎曼曲面习题

梅加强 http://ims.nju.edu.cn/˜meijq

2015.11.13

1. 设 Σ 为紧黎曼曲面, ω 为 $(1,0)$ 型 $1-$ 形式. 利用 Hodge 定理证明: 存在全纯 $1-$ 形式 η 和光滑函数 f, 使得 $\omega = \eta + \partial f$.

2. 设 Σ 为紧黎曼曲面, ω 为 $2-$ 形式. 利用 Hilbert 空间方法证明: $\int_\Sigma \omega = 0$ 当且仅当存在光滑函数 f, 使得 $\omega = d * df$.

3. 利用上题重新证明 Hodge 定理 (提示: 当 η 为 $1-$ 形式时, 对 $d\eta$ 和 $d * \eta$ 应用上题).

4. 设 Σ 为连通紧黎曼曲面, 证明 $H^2_{dR}(\Sigma, \mathbb{C}) = \mathbb{C}$. (提示: 积分给出同构)