# 黎曼曲面习题

梅加强 http://ims.nju.edu.cn/~meijq

2015.10.16

1. 计算 $\mathbb{D}, \mathbb{D}^*, \mathbb{C}^*$ 的 de Rham 上同调群.

2. 设 $\Sigma$ 为单连通黎曼曲面, $p \in \Sigma$. 证明 $H^1_{dR}(\Sigma \setminus \{p\})$ 要么为零, 要么为 $\mathbb{C}$.

3. 设 $\omega$ 是 $\mathbb{C}^*$ 上的实值闭 1–形式. 如果 $[\omega] = k[d\theta] \in H^1_{dR}(\mathbb{C}^*, \mathbb{C})$, 其中 $d\theta = \dfrac{xdy - ydx}{x^2+y^2}$, $k$ 为整数, 则存在 $\varphi : \mathbb{C}^* \to S^1 \subset \mathbb{C}^*$, 使得 $\omega = \varphi^*(d\theta)$. (即 $d\varphi = i\varphi\omega$)

4. 设 $u : \Omega \to \mathbb{R}$ 为调和函数, $\overline{B_\rho(z_0)} \subset \Omega$. 证明 $|\nabla u(z_0)| \leq \dfrac{2}{\rho} \sup\limits_{\partial B_\rho(z_0)} |u|$.

5. 设 $u : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ 为调和函数. 如果存在正常数 $C_1, C_2$, 使得

$$|u(z)| \leq c_1|z| + c_2, \quad \forall\ z \in \mathbb{C},$$

证明 $u$ 为线性函数.