黎曼曲面习题

梅加强 http://ims.nju.edu.cn/~meijq

2015.10.9

1. 设 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 为光滑函数, 且 $f(0)=0$. 证明: 存在光滑函数 $g_1,\cdots,g_n$, 使得

$$f(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^n x_i\cdots g_i(x_1,\cdots,x_n),\ \ \text{且}\ g_i(0)=\frac{\partial f}{\partial x_i}(0),\ i=1,\cdots,n.$$

2. 验证外微分算子定义的恰当性.

3. 设 Σ 为黎曼曲面, $u:\Sigma\to\mathbb{R}$ 为光滑函数. 当 $z=x+iy$ 为局部坐标时, 记

$$\omega=\frac{\partial u}{\partial x}dy-\frac{\partial u}{\partial y}dx,$$

证明 ω 的定义与局部坐标的选取无关, 是 Σ 上的 1–形式.

4. 证明黎曼球面 $\mathbb{S}$ 上不存在非平凡的全纯 1–形式.

5. 证明黎曼环面 $\mathbb{C}/\Lambda$ 上全纯 1–形式的全体组成 1 维复向量空间.