

# 数学分析习题: 第 3 周

梅加强

<http://math.nju.edu.cn/~meijq>

2007.3

**说明:** 只有习题是必须写在作业本上交的, 思考题做好后可以交给我, 但必须是严格独立完成的.

**习题:**

1. 计算下列曲线的弧长:

(1)  $y = x^{\frac{3}{2}}, (0 \leq x \leq 4)$ ;

(2)  $x = e^t \cos t, y = e^t \sin t, t \in [0, 2\pi]$ ;

(3)  $x = a \cos^4 t, y = a \sin^4 t, a > 0, t \in [0, 2\pi]$ ;

(4)  $y^2 = 2ax, a > 0, 0 \leq x \leq a$ .

2. 求下列曲线所围成图形的面积:

(1)  $y^2 = ax, y = \frac{1}{a}x^2, a > 0$ ;

(2)  $y = x^2 - 2x, y = -x^2$ ;

(3)  $y = x(x-1)(x-2), y = 0$ ;

(4)  $y^2 = x^2(a^2 - x^2), a > 0$ ;

(5)  $r = a(1 - \cos \theta), a > 0, \theta \in [0, 2\pi]$ ;

(6)  $r = a \sin 3\theta, a > 0$ .

3. 求下列曲线旋转所成曲面的面积:

(1)  $y = \tan x$  绕  $x$  轴,  $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$ ;

(2)  $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$  绕直线  $y = a, a > 0, t \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ ;

(3)  $x^2 + y^2 = a^2$  绕  $x$  轴,  $a > 0$ ;

(4)  $r^2 = a^2 \cos 2\theta$  绕直线  $\theta = \frac{\pi}{4}$ .

4. 求下列曲面所围成的体积:

(1)  $x + y + z^2 = 1, x = 0, y = 0$ ;

(2)  $x^2 + y^2 = a^2, y^2 + z^2 = a^2, a > 0$ ;

(3)  $z^2 = b(a - x), x^2 + y^2 = ax, a > 0, b > 0$ ;

(4)  $x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx = a^2, a > 0$ .

5. 求下列旋转体的体积:

(1)  $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), t \in [0, 2\pi]$  绕  $x$  轴旋转所围成的旋转体;

(2)  $(x - a)^2 + y^2 = b^2 (a > b > 0)$  的内部绕  $y$  轴旋转所成旋转体;

(3)  $y^2 = 2ax (a > 0)$  绕  $x = b (b > 0)$  旋转所围成的旋转体;

(4)  $y = \sin x, x \in [0, \pi]$  绕  $x$  轴旋转所围成的旋转体.

6. 记  $c_n = (1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}) - \log n, n \geq 1$ . 证明

(1) 极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n$  存在;

(2) 记  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = c$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} n(c_n - c) = \frac{1}{2}$ .

**思考题:**

1. 设  $f$  是  $[a, b]$  上的连续函数, 如果对于任何满足条件  $g(a) = g(b) = 0$  的连续函数  $g$  均有

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0,$$

则  $f \equiv 0$ .

2. 设  $\sigma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  为连续可微的曲线 (即  $\sigma(t) = (x(t), y(t)), x(t)$  和  $y(t)$  为连续可微函数), 则

$$L(\sigma) \geq |\sigma(1) - \sigma(0)|,$$

其中  $L(\sigma)$  是  $\sigma$  的长度,  $|p - q|$  表示平面上两点  $p$  和  $q$  的平面距离.