

## 数学分析习题：第 15 周

梅加强

<http://math.nju.edu.cn/~meijq>

2007.6

说明：只有习题是必须写在作业本上交的，思考题做好后可以交给我，但必须是严格独立完成的。

### 习题：

1. 求下列函数在指定约束条件下的极值：

(1)  $f(x, y) = xy, x + y = 1;$

(2)  $f(x, y) = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}, x^2 + y^2 = 1;$

(3)  $f(x, y) = x^2 + y^2, \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1;$

(4)  $f(x, y) = \cos \pi(x + y), x^2 + y^2 = 1;$

(5)  $f(x, y, z) = x - 2y + 2z, x^2 + y^2 + z^2 = 1;$

(6)  $f(x, y, z) = 3x^2 + 3y^2 + z^2, x + y + z = 1;$

(7)  $f(x, y, z) = x^a y^b z^c, x + y + z = 1,$  其中  $a, b, c > 0.$

2. 求周长为  $2l$  的平面三角形的最大面积.

3. 求包含在椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  内矩形的最大周长.

4. 求包含在椭球  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  内长方体的最大体积.

5. 求原点到直线  $2x + 2y + z + 9 = 0, 2x - y - 2z - 18 = 0$  的距离.

6. 求椭圆  $x^2 + 4y^2 = 4$  到直线  $x + y = 4$  的距离.

7. 求圆内接三角形中面积最大者.

8. 设  $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$ , 求  $u = \sum_{i=1}^n a_i x_i$  在高维球面  $\sum_{i=1}^n x_i^2 = r^2$  上的最大值和最小值.

9. 设  $p > 1$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , 证明 Hölder 不等式

$$\sum_{i=1}^n u_i v_i \leq \left( \sum_{i=1}^n u_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum_{i=1}^n v_i^q \right)^{\frac{1}{q}}, \quad u_i, v_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

思考题:

1. 构造一个光滑的二元函数  $f(x, y)$ , 使得原点  $(0, 0)$  为  $f$  的驻点, 且在每一条直线  $y = kx$  上,  $(0, 0)$  均为极小值点, 但  $(0, 0)$  不是  $f$  的极小值点.
2. 设  $A = (a_{ij})_{n \times n}$  为  $n$  阶方阵,  $b = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ , 令

$$f(x) = x^T A x + b x = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^n b_i x_i, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

分析  $f$  在  $\mathbb{R}^n$  上的极值.