数学分析习题: 第 14 周

梅加强

http://math.nju.edu.cn/~meijq

2007.6

说明: 只有习题是必须写在作业本上上交的, 思考题做好后可以交给我, 但必须是严格独立完成的.

习题:

1. 求下列曲面在指定点的切面:

   (1) $x^3 + 2xy^2 - 7z^3 + 3y + 1 = 0,\ (x, y, z) = (1, 1, 1)$;

   (2) $(x^2 + y^2)^2 + x^2 - y^2 + 7xy + 3x + z^4 - z = 14,\ (x, y, z) = (1, 1, 1)$;

   (3) $\sin^2 x + \cos(y + z) = \frac{3}{4},\ (x, y, z) = (\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, 0)$;

   (4) $x^2 + y^2 = z^2 + \sin z,\ (x, y, z) = (0, 0, 0)$.

2. 求下列曲线在指定点的切线:

   (1) $x^2 + y^2 + z^2 = 3x,\ 2x - 3y + 5z = 4,\ (x, y, z) = (1, 1, 1)$;

   (2) $x^2 + y^2 = 10,\ y^2 + z^2 = 10,\ (x, y, z) = (1, 1, 3)$;

   (3) $3x^2 + 3y^2 - z^2 = 25,\ x^2 + y^2 = z^2,\ (x, y, z) = (\sqrt{7}, 3, 4)$;

   (4) $x^3y + y^3x = 3 - x^2y^2,\ (x, y) = (1, 1)$.

3. 求下列函数的驻点, 并判断是否为极值点, 是什么类型的极值点:

   (1) $f(x, y) = y^2(\sin x - \dfrac{x}{2})$, (2) $f(x, y) = \cos(x + y) + \sin(x - y)$,

   (3) $f(x, y) = y^x$, (4) $f(x, y) = x/y - xy$,

   (5) $f(x, y) = (ax^2 + by^2)e^{-x^2-y^2}$, (6) $f(x, y) = ye^{-x^2}$.

4. 求下列函数的极值:

   (1) $f(x, y) = xy\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}},\ a, b > 0$;

(2) $f(x,y)=\sin x+\cos y+\cos(x-y),\ 0\leqslant x\leqslant \frac{\pi}{2},\ 0\leqslant y\leqslant \frac{\pi}{2}$;

(3) $f(x,y)=xy\log(x^2+y^2),\ x,y\neq 0$.

5. 求下列函数的极值:

(1) $f(x,y)=4(x-y)-x^2-y^2$, (2) $f(x,y)=x^2+(y-1)^2$,

(3) $f(x,y)=x^2+xy+y^2+x-y+1$, (4) $f(x,y)=x^3+y^3-3xy$.

6. 求抛物线 $y=x^2$ 与直线 $x-y-2=0$ 之间的最短距离.

7. 给定 $\mathbb{R}^n$ 中 m 个点, 求与这些点的距离的平方和最小的一点.

8. 设 $0<a<b,\ n\geqslant 1$. 试在 (a,b) 中选取 n 个点 $x_1,x_2,\cdots,x_n$, 使得

$$u=\frac{x_1\cdot x_2\cdot\cdots\cdot x_n}{(a+x_1)(x_1+x_2)\cdots(x_{n-1}+x_n)(x_n+b)}$$

取最大值.

思考题:

1. 设 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 为连续可微的映射, 且

$$\|f(x)-f(y)\|\geqslant\|x-y\|,\ \forall\ x,y\in\mathbb{R}^n$$

证明 f 可逆, 且其逆映射也是连续可微的.

2. 给定 $\mathbb{R}^n$ 中 m 个点, 证明存在 $\mathbb{R}^n$ 中半径最小的闭球包含这些给定的点, 并且这样的球是惟一的; 如果给定 3 个点, 求这个球的球心和半径.