可积函数的逼近与 Riemann 引理*

梅加强

南京大学数学系

http://math.nju.edu.cn/~meijq

定理 1. 设 f 为 $[a,b]$ 上 Riemann 可积函数, 则 $\forall \epsilon > 0$,

(1) 存在 $[a,b]$ 上的阶梯函数 g, 使得

$$\int_a^b |f-g|\,\mathrm{d}x < \epsilon,$$

(2) 存在 $[a,b]$ 上的连续函数 h, 使得

$$\int_a^b |f-h|\,\mathrm{d}x < \epsilon.$$

证明: (1). 由 f 可积知,$\forall \epsilon > 0$, $\exists$ $[a,b]$ 的一个分割 $\pi: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, s.t

$$\sum_{i=1}^n \omega_i(f)\cdot \triangle x_i < \epsilon.$$

在 $[x_{i-1}, x_i]$ 中取定 ξ_i(例如取 $\xi_i = x_i$), 则 $\forall x \in [x_{i-1}, x_i]$, 有

$$|f(x) - f(\xi_i)| \le \omega_i(f),$$

* 《数学分析》补充材料, 2006.2

令 g 为在 $[x_{i-1}, x_i]$ 中值为 $f(\xi_i)$ 的阶梯函数, 则

$$\begin{aligned}
\int_a^b |f-g|\,\mathrm{d}x &= \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(x)-g(\xi_i)|\,\mathrm{d}x \\
&\le \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \omega_i(f)\,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{i=1}^n \omega_i(f)\cdot\triangle x_i < \epsilon.
\end{aligned}$$

(2). 由 (1), 可设 f 为阶梯函数. 不失一般性, 又可以假设 f 只取两个值:

$$f(x) = \begin{cases} y_1, & x\in[a,c] \\ y_2, & x\in[c,b] \end{cases}$$

考虑连续函数

$$h(x) = \begin{cases} y_1, & x\in[a,c-\delta] \\ \text{线性}, & x\in[c-\delta,c+\delta] \\ y_2, & x\in[c+\delta,b] \end{cases}$$

记 $M=\max\{|y_1|,|y_2|\}$. 易知有下面的估计

$$\int_a^b |f-h|\,\mathrm{d}x < 4M\delta,$$

因此 δ 充分小时 h 为所求连续函数.

注: 上述 g, h 与 f 满足同样的上下确界.

定理 2: (Riemann 引理) 设 f 在 $[a,b]$ 上可积, 则

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)\cdot\sin\lambda x\,\mathrm{d}x = 0.$$

证明: (i). 如果 f 为常数 c, 则

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)\cdot\sin\lambda x\,\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to+\infty}\frac{c}{\lambda}(\cos\lambda a-\cos\lambda b) = 0.$$

(ii). 一般地, $\forall\, \epsilon > 0$, 由定理 1, $\exists$ 阶梯函数 g, $s.t$

$$\int_a^b |f - g|\, \mathrm{d}x < \epsilon/2,$$

由 (i) 易见, $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \int_a^b g(x) \cdot \sin \lambda x\, \mathrm{d}x = 0$. 故 λ 充分大时,

$$\Big| \int_a^b g(x) \cdot \sin \lambda x\, \mathrm{d}x \Big| < \epsilon/2.$$

此时, 有

$$\begin{aligned}
\Big| \int_a^b f(x) \cdot \sin \lambda x\, \mathrm{d}x \Big| &\leq \Big| \int_a^b (f(x) - g(x)) \cdot \sin \lambda x\, \mathrm{d}x \Big| + \Big| \int_a^b g(x) \cdot \sin \lambda x\, \mathrm{d}x \Big| \\
&\leq \int_a^b |f - g|\, \mathrm{d}x + \epsilon/2 \\
&< \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.
\end{aligned}$$

即 $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \int_a^b f(x) \cdot \sin \lambda x\, \mathrm{d}x = 0$.