在最后的积分中, 将积分区间分为 $[0,\pi/4]$ 和 $[\pi/4,\pi/2]$ 两部分, 在后一部分中利用变量替换 $t\to\pi/2-t$ 可得

$$\begin{aligned}I&=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dt}{1+\sin^2 t}+2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dt}{1+\cos^2 t}-\frac{\pi}{2}\\&=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dt}{2\sin^2 t+\cos^2 t}+2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dt}{\sin^2 t+2\cos^2 t}-\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

利用例 4.3.17 的结果可得

$$I=\sqrt{2}\arctan\sqrt{2}+\sqrt{2}\arctan\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}\big(\sqrt{2}-1\big).$$

值得指出的是, 初等函数的原函数并非都能用初等函数显式表示, 例如下面函数就是如此:

$$\mathrm{e}^{\pm x^2},\ \sin(x^2),\ \cos(x^2),\ \frac{\sin x}{x},\ \frac{\cos x}{x},\ \sqrt{1-k^2\sin^2 x},\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}}\ (0<k<1).$$

这些函数的积分通常也就不能显式地计算出来.

习题 4.3

1. 设 $f\in C^0[a,b]$, $g(x)=\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$, 用分部积分证明

$$\int_a^b g(x)\,dx=\int_a^b(b-x)f(x)\,dx.$$

2. 设 f 可逆, 且 f 及其反函数 g 均属于 $C^1[a,b]$, 用分部积分或变量替换证明

$$\int_a^b g(x)\,dx=bg(b)-ag(a)-\int_{g(a)}^{g(b)}f(y)\,dy.$$

请说明上式的几何意义并讨论能否降低对 f,g 的要求.

3. 设 $f\in C^2[a,b]$, 用分部积分证明

$$\int_a^b f(x)\,dx=\frac{1}{2}[f(a)+f(b)](b-a)+\frac{1}{2}\int_a^b(x-a)(x-b)f''(x)\,dx.$$

4. 计算下列积分:

(1) $\displaystyle\int_1^2\ln^2 x\,dx$; (2) $\displaystyle\int_0^1 x^2\mathrm{e}^{-x}\,dx$; (3) $\displaystyle\int_0^\pi \mathrm{e}^x\cos x\,dx$;

(4) $\displaystyle\int_0^\pi \mathrm{e}^x\sin x\,dx$; (5) $\displaystyle\int_0^\pi x^2\sin x\,dx$; (6) $\displaystyle\int_0^1 x^3\mathrm{e}^{-x^2}\,dx$;

(7) $\displaystyle\int_0^1 x^2\arctan x\,dx$; (8) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\arcsin x\,dx$; (9) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\cos(2x)\,dx$.

5. 计算下列积分:

$$(1)\ \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx;\qquad (2)\ \int_0^1 \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\,dx;\qquad (3)\ \int_0^1 (\arcsin x)^2\,dx;$$

$$(4)\ \int_1^{\sqrt{2}} \sqrt{x^2-1}\,dx;\qquad (5)\ \int_0^1 x^2\sqrt{1+x^2}\,dx;\qquad (6)\ \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^3 x};$$

$$(7)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\cos x};\qquad (8)\ \int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx;\qquad (9)\ \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x}.$$

6. 求下列积分的递推公式 (m, n 为非负整数):

$$(1)\ \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx;\qquad (2)\ \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\,dx;\qquad (3)\ \int_0^1 (1-x^2)^n\,dx;$$

$$(4)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\sin nx\,dx;\qquad (5)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\cos nx\,dx;\qquad (6)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x\sin^n x\,dx;$$

$$(7)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx;\qquad (8)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin nx}{\sin x}\,dx;\qquad (9)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 nx}{\sin^2 x}\,dx.$$

7. 设 $f\in C^0[0,1]$, 证明

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx,$$

并利用这个等式计算积分 $\int_0^{\pi} \frac{x\sin^2 x}{1+\cos^2 x}dx$.

8. 设 $k\ge 1$, $p^2-4q<0$, 计算积分 $\int_0^1 \frac{x\,dx}{(x^2+px+q)^k}$.

9. 计算下列积分:

$$(1)\ \int_0^1 \frac{dx}{1+x^4};\qquad (2)\ \int_0^1 \frac{x^4\,dx}{1+x^2};\qquad (3)\ \int_0^1 \frac{dx}{(x+1)(x+2)^2};$$

$$(4)\ \int_0^1 \frac{x^3\,dx}{(x^2+1)^2};\qquad (5)\ \int_0^1 \frac{x\,dx}{(x+1)(2x+1)};\qquad (6)\ \int_0^1 \frac{(x-1)\,dx}{x^2-x+1};$$

$$(7)\ \int_0^1 \frac{(x^4+1)\,dx}{x(x^2+1)^2};\qquad (8)\ \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dx}{(1-x^2)^2};\qquad (9)\ \int_0^1 \frac{dx}{x^4+x^2+1}.$$

10. 计算下列积分:

$$(1)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x\cos x}{1+4\cos^2 x}\,dx;\qquad (2)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\cos x}{1+\sin^4 x}\,dx;\qquad (3)\ \int_0^{\pi} \frac{dx}{\sin^4 x+\cos^4 x};$$

$$(4)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}\,dx;\qquad (5)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\,dx}{\sin^3 x+\cos^3 x};\qquad (6)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3+\cos x};$$

$$(7)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\sin x}\,dx;\qquad (8)\ \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^4 x};\qquad (9)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x+\sin x}{1+\cos x}\,dx.$$

11. 计算下列积分:

$$(1)\ \int_a^b \sqrt{\frac{x-a}{b-x}}\,dx;\quad (2)\ \int_0^1 \frac{dx}{1+\sqrt[3]{1+x}};\quad (3)\ \int_{\frac14}^{\frac12} \frac{dx}{x\sqrt{x-x^2}};$$

$$(4)\ \int_0^1 \frac{(1-x^2)\,dx}{\sqrt{1+x^2}};\quad (5)\ \int_{\frac12}^1 \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}\,dx;\quad (6)\ \int_{\frac12}^{\frac{\sqrt2}{2}} \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}};$$

$$(7)\ \int_0^1 \frac{\sqrt{1+x^2}}{2+x^2}\,dx;\quad (8)\ \int_0^{\sqrt{\frac32}-1} \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-2x-x^2}};\quad (9)\ \int_0^1 \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1+x^2}}.$$

12. 计算下列积分:

$$(1)\ \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,dx;\qquad (2)\ \int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x}\,dx.$$

13. 设 $0<\alpha,\beta<1$, 证明

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-2\alpha x+\alpha^2}\sqrt{1-2\beta x+\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}}\ln\frac{1+\sqrt{\alpha\beta}}{1-\sqrt{\alpha\beta}}.$$

§4.4 简单的微分方程

本节内容可以作为选读材料. 给定函数 f, 求 f 的原函数相当于解以 g 为未知量的方程 $g'=f$. 为了方便起见, 我们用 $\frac{d}{dx}$ 表示求导运算, 即 $\frac{d}{dx}g=g'$. 类似地, 用 $\frac{d^2}{dx^2}$ 表示二次求导运算, 而 $\frac{d^n}{dx^n}$ 表示 n 次求导运算. 我们约定 $\frac{d^0}{dx^0}=1$. 引入记号

$$P=\sum_{k=0}^n a_k(x)\frac{d^k}{dx^k},$$

P 在 n 阶可导的函数 φ 上的作用定义为

$$P\varphi=\sum_{k=0}^n a_k(x)\varphi^{(k)}(x).$$

如上定义的运算 P 称为一个 n 阶微分算子, 关于未知量 φ 的方程 $P\varphi=f$ 的方程称为 n 阶微分方程. 微分方程的求解将在后续的专门课程中学习, 我们在此仅举几个简单的例子.

例 4.4.1 设 $n\ge 0$, 证明 $\varphi^{(n+1)}=0$ 当且仅当 φ 是次数不超过 n 的多项式.

证明. 只要证明必要性就可以了. 我们对 n 进行归纳. $n=0$ 的情形已经证明过. 设 $n=k-1$ 时结论成立, 则当 $n=k$ 时, 由 $\big(\varphi^{(k)}\big)'=\varphi^{(k+1)}=0$ 可知 $\varphi^{(k)}$ 为常值函数, 记为 C. 此时

$$\big(\varphi-Cx^k/k!\big)^{(k)}=\varphi^{(k)}-C=0,$$

根据归纳假设, $\varphi-Cx^k/k!$ 是次数不超过 $k-1$ 的多项式, 从而 φ 是此数不超过 k 的多项式.