《流形与几何》测验四

梅加强

meijq@nju.edu.cn

2017.6.22

说明： 从下列题目中选择 5 题完成并于一周内发送至本人邮箱.

1. 设 (M^n, g) 为黎曼流形, 如果其截面曲率恒等于常数 c, 证明其 $(0,4)$ 型曲率张量必定形如

$$R(X,Y,Z,W) = c(\langle X,Z\rangle\langle Y,W\rangle - \langle X,W\rangle\langle Y,Z\rangle).$$

2. 4 维黎曼流形的 $(0,4)$ 型曲率张量最多有几个独立的分量？请说明理由.

3. 设 (M^n, g) 为黎曼流形, 在局部坐标系 $\{x^i\}_{i=1}^n$ 中, 度量 g 可以表示为 $g = g_{ij}dx^i \otimes dx^j$. 设 $\{e_i\}_{i=1}^n$ 为一组局部标准正交标架, 其对偶余切标架记为 $\{\omega^i\}_{i=1}^n$. 证明

$$\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \cdots \wedge \omega^n = \pm\sqrt{\det(g_{ij})}\, dx^1 \wedge dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n.$$

4. 设 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 为正的光滑函数, 考虑 $\mathbb{R}^n$ 上的黎曼度量 $g = f^2 g_0$, 其中 g_0 为标准黎曼度量. 请用活动标架法计算 $(\mathbb{R}^n, g)$ 的数量曲率.

5. 设 $n \geq 2$, 考虑 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的二阶协变张量场 $\theta = -dx^0 \otimes dx^0 + \sum\limits_{i=1}^n dx^i \otimes dx^i$, 记

$$H = \{(x^0, x^1, \cdots, x^n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid -(x^0)^2 + (x^1)^2 + \cdots + (x^n)^2 = -1\}.$$

证明: θ 限制在 H 上为黎曼度量, 且其截面曲率恒等于 -1.

6. (i) 设 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 为光滑凸函数, 证明超曲面 $\mathrm{graph}(f)$ 的截面曲率一定是非负的; (ii) 设 $f_0, f_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 为光滑函数, 如果 $f_0(0) = f_1(0) = 0$, 且在原点附近 $f_1 \geq f_0 \geq 0$, 证明在原点处 $\mathrm{graph}(f_1)$ 的截面曲率总是大于或等于 $\mathrm{graph}(f_0)$ 的截面曲率.

7. 设 Σ 为 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的闭超曲面. 证明: 存在 $p \in \Sigma$, 使得 Σ 在 p 处的截面曲率都大于零.

8. 能否在环面上找到截面曲率恒为正的黎曼度量？请说明理由.
9. 设 M 为偶数维定向流形, g_0, g_1 为两个黎曼度量, 其曲率形式分别记为 Ω_0, Ω_1. 请通过计算直接证明 Pfaffian $\mathrm{Pf}(\Omega_0)$ 和 $\mathrm{Pf}(\Omega_1)$ 之间相差一个恰当形式.
10. 谈谈你经过这一个学期的学习以后对流形和几何的认识和体会.