《流形与几何》测验三

梅加强
meijq@nju.edu.cn

2017.5.18

说明： 从下列题目中选择 5 题完成并于一周内发送至本人邮箱.

1. 在平面 $\mathbb{R}^2$ 上定义等价关系 $\sim$ 如下: $(x, y) \sim (x', y')$ 当且仅当存在整数 m, n, 使得 $(x', y') = \big(m + (-1)^{|n|}x, n + y\big)$. 记商空间 $K = \mathbb{R}^2/\sim$, 称为 Klein 瓶. 试说明 Klein 瓶是不可定向的二维流形.

2. 在单位球面 $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 上定义 $n-$形式 Ω 如下
$$\Omega = \sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{i-1}x^i dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^{n+1},$$
验证 Ω 在 S^n 上处处非零, 并研究它与 S^n 的体积形式之间的关系.

3. 设 $A = \big(a_{ij}\big)_{2n\times 2n}$ 为斜对称(即 $a_{ji} = -a_{ij}$)方阵. 在 $\mathbb{R}^{2n}$ 上定义 $2-$形式 ω 如下
$$\omega = \sum_{1\le i<j\le 2n} a_{ij} dx^i \wedge dx^j,$$
记 $\omega^n = n! \cdot \mathrm{Pf}(A) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{2n}$, 证明 $\det(A) = \big(\mathrm{Pf}(A)\big)^2$.

4. 请通过局部计算具体验证外微分算子的定义与局部坐标系的选取无关.

5. 设 (M, g) 为定向的闭黎曼流形, Ω 为其体积形式. 证明: 当 $\varphi, \psi \in C^\infty(M)$ 时, 成立
$$\int_M \varphi\Delta\psi\Omega = \int_M \psi\Delta\varphi\Omega.$$

6. 设 (M, g) 为黎曼流形, 在局部坐标系 (U, φ) 中, $g = g_{ij}dx^i \otimes dx^j$. (i) 请验证等式 $g(\nabla x^i, \nabla x^j) = g^{ij}$ 是否成立. (ii) $g^{ij}\frac{\partial}{\partial x^i} \otimes \frac{\partial}{\partial x^j}$ 是否依赖于局部坐标系的选取?

7. 在 $\mathbb{R}^3$ 中的球坐标下写出标准黎曼度量 g_0 以及 Laplace 算子 Δ 的具体表达式.

8. 详细说明流形的切丛上总存在联络, 并对 $\mathbb{R}^n$ 具体构造一个与标准联络不同的联络.

9. 设 D 为流形切丛上的联络, 在不同的局部坐标系下计算 Christoffel 系数的变换公式.

10. 设 (M, g) 为黎曼流形, 在局部坐标系 (U, φ) 中, $g = g_{ij}dx^i \otimes dx^j$. 定义

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}g^{km}(\partial_i g_{mj} + \partial_j g_{mi} - \partial_m g_{ij}),$$

请验证 Γ_{ij}^k 满足上一题中的变换公式.