《流形与几何》测验二

梅加强

meijq@nju.edu.cn

2017.4.17

说明： 从下列题目中选择 5 题完成并于一周内发送至本人邮箱.

1. 设 M 为连通微分流形, $p, q \in M$. 利用单参数变换群证明: 存在微分同胚 $f : M \to M$, 使得 $f(p) = q$.

2. 设 M 为微分流形, N 为 M 的正则子流形. 设 X, Y 为 M 上的切向量场, 如果 X, Y 均与 N 相切, 证明 $[X, Y]$ 也与 N 相切.

3. 设 X 为 $\mathbb{R}^n$ 上的光滑向量场. 如果 X 的每一个分量均为有界函数, 证明 X 是完备向量场.

4. 设 G 为连通 Lie 群, 证明 G 为交换群当且仅当其 Lie 代数是平凡的.

5. 请举出一个 2 维的不可交换 Lie 群的具体例子, 并计算其 Lie 代数.

6. 设 V 为有限维实向量空间, W 为 V 的子向量空间. 记

$$W' = \{\phi \in V^* \mid \phi(w) = 0, \forall w \in W\},$$

证明 $\dim W' = \dim V - \dim W$.

7. 设 V 为 n 维实向量空间, $\{\phi^i\}_{i=1}^n \subset V^*$. 令 $\Phi = \sum\limits_{i=1}^n \phi^i \otimes \phi^i$, 则 Φ 为 V 上的双线性型. 证明: Φ 为 V 的内积当且仅当 $\{\phi^i\}_{i=1}^n$ 为 V^* 的一组基.

8. 设 V, W 均为有限维实向量空间, 证明 $\mathrm{Hom}(V, W)$ 和 $V^* \otimes W$ 自然同构.

9. 设 M 为微分流形, $p \in M$, $\omega \in T_p^*M$. 证明: 存在光滑函数 $f \in C^\infty(M)$, 使得 $\omega = df(p)$.

10. 设 ω 为流形 M 上的 $1-$形式, $p \in M$. 如果 $\omega(p) = 0$, 证明: 存在有限个光滑函数 f_i 以及 $1-$形式 ω_i, 使得每一个 f_i 均在 p 处等于零, 且 $\omega = \sum_i f_i \omega_i$.