《流形与几何》测验一

梅加强

meijq@nju.edu.cn

2017.3.16

说明： 从下列题目中选择 5 题完成并于一周内发送至本人邮箱.

1. 设 M, N 为微分流形, $f: M \to N$ 为光滑映射. 如果 f 的秩恒等于 ℓ, 则任给 $p \in M$, 存在包含 p 的局部坐标邻域 U 以及包含 $q = f(p)$ 的局部坐标邻域 V, 使得 $f(U) \subset V$, 且 f 的局部表示形如
$$(x_1, \cdots, x_m) \mapsto (x_1, \cdots, x_\ell, 0, \cdots, 0).$$
2. 能否将 $S^2 \times S^1$ 嵌入 $\mathbb{R}^4$ 中? 请说明理由.
3. 设 $\{A_\alpha\}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的一族局部有限的闭集, 证明它们的并集仍为闭集.
4. 设 A, B 为 $\mathbb{R}^n$ 中不相交的非空闭集. 证明: 存在光滑函数 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, 使得 f 在 A 上恒为 0, 在 B 上恒为 1.
5. 设 M 为流形, $p \in M$, X 为 p 处的切向量. 证明: 存在曲线 $\sigma: (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$, 使得 $\sigma(0) = p$, $\sigma'(0) = X$.
6. 设 M, N 为微分流形, 证明 $M \times N$ 也是微分流形, 且 $T_{(p,q)} M \times N$ 自然同构于 $T_p M \oplus T_q N$.
7. 任给 $A \in M_{n\times n}$, $t \in \mathbb{R}$, $I_n + tA$ 的行列式可以展开为
$$\det(I_n + tA) = 1 + \sigma_1(A)t + \sigma_2(A)t^2 + \cdots + \sigma_n(A)t^n,$$
其中 $\sigma_i(A)$ $(1 \le i \le n)$ 是关于 A 的元素的多元多项式, 比如 $\sigma_1(A) = \mathrm{tr}A$, $\sigma_n(A) = \det A$. 将 σ_i 视为 $M_{n\times n}$ 上的光滑函数, 试求其切映射.
8. 请说明非退化临界点的定义与局部坐标的选取无关.
9. 证明: S^3 微分同胚于 $SU(2)$.
10. 考虑映射 $f: GL(2n, \mathbb{R}) \to GL(2n, \mathbb{R})$, $f(A) = AKA^T$, 其中 K 是分块矩阵, 其左上角为 $-I_n$, 右下角为 I_n, 其余位置为零. 利用切映射计算 f 的秩.