《流形与几何》测验一 2017.11.14

说明： 选择 8 题完成并于 2017.11.18 前发送至 meijq@nju.edu.cn.

1. 设 M, N 为微分流形, $f: M \to N$ 为光滑映射. 如果 f 的秩恒等于 ℓ, 则任给 $p \in M$, 存在包含 p 的局部坐标邻域 U 以及包含 $q = f(p)$ 的局部坐标邻域 V, 使得 $f(U) \subset V$, 且 f 的局部表示形如
$$(x_1, \cdots, x_m) \mapsto (x_1, \cdots, x_\ell, 0, \cdots, 0).$$
2. 设 M, N 为紧致微分流形, f 为 $M \times N$ 上的光滑函数. 证明: 任给 $\varepsilon > 0$, 存在 M 上的有限个光滑函数 g_i 和 N 上的有限个光滑函数 h_i $(i = 1, \cdots, k)$, 使得 $\left|f(x,y) - \sum_{i=1}^k g_i(x)h_i(y)\right| < \varepsilon,\ \forall\, x \in M,\ y \in N$.
3. 设 $\{A_\alpha\}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的一族局部有限的闭集, 证明它们的并集仍为闭集.
4. 设 $f: M \to N$ 为微分流形之间的光滑映射. 如果 S 为 M 的正则子流形, 则 $f|_S : S \to N$ 仍为光滑映射; 如果 T 为 N 的正则子流形, 且 $f(M) \subset T$, 则存在光滑映射 $g: M \to T$, 使得 $f = i \circ g$, 其中 $i: T \to N$ 为包含映射.
5. 设 M 为微分流形, $p \in M$, $\omega \in T_p^*M$. 证明: 存在光滑函数 $f \in C^\infty(M)$, 使得 $\omega = df(p)$.
6. 设 ω 为流形 M 上的 1−形式, $p \in M$. 如果 $\omega(p) = 0$, 证明: 存在有限个光滑函数 f_i 以及 1−形式 ω_i, 使得每一个 f_i 均在 p 处等于零, 且 $\omega = \sum_i f_i \omega_i$.
7. 设 M 为连通的微分流形, $p, q \in M$. 证明, 存在微分同胚 $f: M \to M$, 使得 $f(p) = q$.
8. 设 M 为微分流形, N 为 M 的正则子流形, X 为 M 上的光滑切向量场, 如果对任意 $p \in N$, 均有 $X(p) \in T_pN$, 则称 X 与 N 相切. 如果 X, Y 均与 N 相切, 证明 $[X, Y]$ 也与 N 相切.
9. 设 X 为 $\mathbb{R}^n$ 上的光滑向量场. 如果 X 的每一个分量均为有界函数, 证明 X 是完备向量场.
10. 设 G 为连通 Lie 群, 证明 G 为交换群当且仅当其 Lie 代数是平凡的.
11. 通过详细计算验证外微分算子的定义不依赖于局部坐标的选取.