《流形与几何》测验四　2016.6.15

说明：从下列题目中选择 5 题完成并于 6 月 24 日前将解答投入我在西大楼（数学系）的信箱内.

1. 设 (M,g) 为黎曼流形, f 为光滑函数. 在局部坐标下, 计算 ∇f 和 Δf 的表达式.

2. 设 (M,g) 为黎曼流形, X 为切向量场. 设 $\{e_i\}_{i=1}^n$ 为局部标正标架. 证明 $\mathrm{div}(X)=\sum\limits_{i=1}^n g(D_{e_i}X,\ e_i)$.

3. 设 (M,g) 为黎曼流形, 将协变张量 g 的两个协变指标均提升为逆变指标, 得到的逆变张量记为 $\hat{g}$. 如果 D 为 (M,g) 的 Levi-Civita 联络, 证明 $D\hat{g}=0$.

4. 设 (M,g) 为黎曼流形, $\phi: M\to M$ 为微分同胚. 证明 $S(\phi^*g)=S\circ\phi$, 其中 S, $S(\phi^*g)$ 分别是黎曼流形 (M,g) 和 (M,ϕ^*g) 的标量曲率. 如果 $\{\phi_t\}$ 是向量场 X 生成的单参数变换群, 对等式 $S(\phi_t^*g)=S\circ\phi_t$ 关于 t 求导, 你能得出什么?

5. 设 (M,g) 为黎曼流形, 在局部坐标系 $\{x^i\}_{i=1}^n$ 中, 度量 g 可以表示为 $g=g_{ij}dx^i\otimes dx^j$. 设 $\{e_i\}_{i=1}^n$ 为一组局部标准正交标架, 其对偶余切标架记为 $\{\omega^i\}_{i=1}^n$. 证明
$$\omega^1\wedge\omega^2\wedge\cdots\wedge\omega^n=\pm\sqrt{\det\left(g_{ij}\right)}\,dx^1\wedge dx^2\wedge\cdots\wedge dx^n.$$

6. 设 (M,g) 为黎曼流形, $\{e_i\}_{i=1}^n$ 为一组局部标准正交标架, 其对偶余切标架记为 $\{\omega^i\}_{i=1}^n$. 设 $\{\eta_i^j\}$ 为一组 $1-$ 形式, 满足条件
$$\eta_i^j+\eta_j^i=0,\quad d\omega^i=\omega^j\wedge\eta_j^i,$$
证明 $\{\eta_i^j\}$ 就是联络 $1-$ 形式.

7. S^2 从 $\mathbb{R}^3$ 中诱导的黎曼度量记为 g. 在球极投影坐标 $\{u,v\}$ 下, 通过计算证明
$$g=\frac{4}{(1+u^2+v^2)^2}\big[du\otimes du+dv\otimes dv\big],$$
由此证明其截面曲率恒等于 $+1$, 其面积等于 4π.

8. 谈谈你经过这一个学期的学习以后对流形和几何的认识和体会.