《流形与几何》测验三　2016.5.16

说明：从下列题目中选择 5 题完成并于一周内交给我.

1. 设 V, W 均为有限维实向量空间, 证明 $\mathrm{Hom}(V, W)$ 和 $V^* \otimes W$ 自然同构.

2. 设 V 为 n 维实向量空间, $\{\phi^i\}_{i=1}^n \subset V^*$. 令 $B = \sum\limits_{i=1}^n \phi^i \otimes \phi^i$, 则 B 为 V 上的双线性型. 证明: B 为 V 的内积当且仅当 $\{\phi^i\}_{i=1}^n$ 为 V^* 的一组基.

3. 在平面 $\mathbb{R}^2$ 上定义等价关系 $\sim$ 如下: $(x, y) \sim (x', y')$ 当且仅当存在整数 m, n, 使得 $(x', y') = \big(m + (-1)^{|n|}x, n + y\big)$. 记商空间 $K = \mathbb{R}^2/\sim$, 称为 Klein 瓶. 试说明 Klein 瓶是不可定向的二维流形.

4. 在单位球面 $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 上定义 $n-$ 形式 Ω 如下
$$\Omega = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i-1} x^i dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^{n+1},$$
验证 Ω 在 S^n 上处处非零, 并研究它与 S^n 的体积形式之间的关系.

5. 设 $A = \big(a_{ij}\big)_{2n\times 2n}$ 为斜对称 (即 $a_{ji} = -a_{ij}$) 方阵. 在 $\mathbb{R}^{2n}$ 上定义 $2-$ 形式 ω 如下
$$\omega = \sum_{1\le i<j\le 2n} a_{ij} dx^i \wedge dx^j,$$
记 $\omega^n = n! \cdot \mathrm{Pf}(A) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{2n}$, 证明 $\det(A) = \big(\mathrm{Pf}(A)\big)^2$.

6. 设 f, g 为 $\mathbb{R}^3$ 中的光滑函数, 通过计算验证
$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial(f,g)}{\partial(y,z)} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,z)} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)} = 0,$$
然后将上式推广到 $\mathbb{R}^n$ 中.

7. 验证外微分算子的定义与局部坐标系的选取无关 (你可以利用上题).

8. 设 $\psi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times M \to M$ 为光滑映射, 其中 M 为微分流形. 记
$$\psi_t(x) = \psi(t, x), \quad X(x) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \psi_t(x).$$
当 ω 为 M 上的微分形式时, 证明 $\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \psi_t^* \omega = L_X \omega$.