

《流形与几何》测验一 2016.4.18

说明：从下列题目中选择 5 题完成并于一周内交给我.

1. 设 M 为微分流形, 证明投影 $\pi : TM \rightarrow M$ 为淹没.
2. 设 $f : M \rightarrow N$ 为流形之间的光滑映射, X, Y 分别为 M, N 上的切向量场. 如果 $f_{*p}X(p) = Y(f(p))$ 对任意 $p \in M$ 均成立, 证明 f 将 X 的流线映为 Y 的流线.
3. 设 M 为连通微分流形, $p, q \in M$. 利用单参数变换群证明: 存在微分同胚 $f : M \rightarrow M$, 使得 $f(p) = q$.
4. 设 M 为微分流形, N 为 M 的正则子流形. 设 X, Y 为 M 上的切向量场, 如果 X, Y 均与 N 相切, 证明 $[X, Y]$ 也与 N 相切.
5. 设 G 为 Lie 群, X, Y 为左不变向量场, 证明 $[X, Y]$ 也是左不变向量场.
6. 请举出一个 2 维的不可交换 Lie 群的具体例子, 并计算其 Lie 代数.
7. 计算正交群 $O(n)$ 的 Lie 代数.
8. 设 X 为 \mathbb{R}^n 中的光滑向量场. 如果 X 有界, 证明 X 是完备向量场.