《流形与几何》测验一　2016.3.16

说明：从下列题目中选择 5 题完成并于一周内交给我.

1. 设 M, N 分别为 m, n 维微分流形, 证明 $M \times N$ 为 $m+n$ 维微分流形.

2. 设 M, N 为微分流形, $f: M \to N$ 为光滑映射. 如果 f 的秩恒等于 l, 则任给 $p \in M$, 存在包含 p 的局部坐标邻域 U 以及包含 $q = f(p)$ 的局部坐标邻域 V, 使得 $f(U) \subset V$, 且 f 的局部表示形如
$$(x_1, \cdots, x_m) \mapsto (x_1, \cdots, x_l, 0, \cdots, 0).$$

3. 设 $f: M \to N$ 为微分流形之间的淹没, 证明 f 将开集映为开集.

4. 设 $\{A_\alpha\}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的一族局部有限的闭集, 证明它们的并集仍为闭集.

5. 设 A, B 为 $\mathbb{R}^n$ 中不相交的非空闭集. 证明: 存在光滑函数 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, 使得 f 在 A 上恒为 0, 在 B 上恒为 1.

6. 设 M 为流形, $p \in M$, X_p 为 p 处的切向量. 证明: 存在曲线 $\sigma: (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$, 使得 $\sigma(0) = p$, $\sigma'(0) = X_p$.

7. 设 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 为光滑函数, 证明: 存在光滑函数 $g_{ij} = g_{ji}$ $(i, j = 1, 2, \cdots, n)$, 使得
$$f(x) = f(0) + \nabla f(0) \cdot x + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} x^i x^j g_{ij}(x), \quad g_{ij}(0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(0).$$

8. 考虑映射 $f: GL(2n, \mathbb{R}) \to GL(2n, \mathbb{R})$, $f(A) = AKA^T$, 其中 K 是分块矩阵, 其左上角为 $-I_n$, 右下角为 I_n, 其余位置为零. 利用切映射计算 f 的秩.